A density theorem for closed geodesics in homology classes(Geometry of Moduli spaces and 4-dimensional Manifolds)

勝田, 篤

数理解析研究所講究録
616巻 1987年 4-20

2. A density theorem for closed geodesics in homology classes

名大理 勝田 篤 (Atsushi Katsuda)

§1 序

compact負曲率多様体，あるいはより一般に、Anosov型の測地流をもつRiemann多様体Mに対し．$\pi(x)$ をM内の長さx以下の素な閉測地線（他の閉測地線の何重巻かになっていない閉測地線のこと）の数とする。この時，Margulis，Parry-Pollicott らは．次のような“素数定理”の幾何学的類似が成立することを示した。

$$\pi(x) \sim e^{hx}/hx \qquad \text{as } x \to \infty$$

ここで．hはMの測地流の位相的entropyである。更に．結果だけでなく証明方法も、ゼータ関数を調べるという点で．数論の方法の類似によっている。この延長として、算術級数に対するDirichletの密度定理の幾何学的類似を考えるのは

自然な方向の一つであろう。そこで次の問題を考える。1次元homology類$\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$に対し、$\pi(x, \alpha)$で長さが$x$以下で、そのhomology類が$\alpha$であるような素な閉測地線の数を表わす。

問題　$\pi(x, \alpha)$の$x \to \infty$での様子は何か？

この問題に対する知られている結果を述べる。

1. (Parry-Pollicott, Adachi-Sunadaの結果の一部)
$\#(H_1(M, \mathbb{Z})) < +\infty \Rightarrow$

$$\pi(x, \alpha) \sim \#(H_1(M, \mathbb{Z}))^{-1} e^{hx}/hx \quad \text{as } x \to \infty$$

2. (Adachi-Sunada)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log \pi(x, \alpha) = h$$

今回の結果は、2.の精密化を与える。

定理1. Mのみに依存する定数 $c>0$ が存在して、次をみたす。

$$\pi(x,\alpha) \sim c e^{hx} / e^{1+(b/2)} \quad \text{as } x \to \infty$$

ここで b は、Mの才1 Betti数である。

Phillips - Sarnakは、Mが、定負曲率 $\equiv -1$ をもつ時、次を示した。

定理2. Mのみに依存する定数 $c_0>0$ と、定数 c_i, $(i \geq 1)$（$=0$ か $\neq 0$ かは不明）が存在して次をみたす。

$$\pi(x,\alpha) \sim \left\{ e^{hx} / e^{1+(b/2)} \right\} \left(c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \cdots \right)$$

更に特別な場合、Mが genus g, 定曲率 $\equiv -1$ の compact Riemann 面の時は、定数が求まる。

定理3 $$\pi(x,\alpha) \sim (g-1)^g e^x / x^{1+g} \quad \text{as } x \to \infty$$

以上は、砂田利一氏との共同研究に基づくものである。

ここでは、主に compact Riemann面の場合を述べる。

§2 Dirichlet の密度定理

モデルになったDirichletの密度定理について復習する。乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元 α に対し、$\pi_N(x, \alpha) = \#\{\mathfrak{p}$: 素数 $|$ $\mathfrak{p} \leqq e^x\}$ とおく。この時、

<u>定理</u>
$$\pi_N(x, \alpha) \sim \#|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|^{-1} e^x/x \quad \text{as } x \to \infty$$

この証明のため、$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の1次元指標 χ に対し、L-関数 $L(s, \chi)$ を次のように定義する。

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi([\mathfrak{p}])\, p^{-s})^{-1}$$

(ここで、$\mathfrak{p}$ は素数，$[\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{p}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への射影である。) 次の性質 P-1 ~ 4 が知られている。

P-1. $L(s, \chi)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束し、正則。

P-2. $L(s, \chi)$ は $\mathrm{Re}\, s \geqq 1$ の近傍 U に有理型に解析接続できる。

P-3. $\chi \neq \mathbb{1}$ (自明な指標) のとき、$L(s, \chi)$ は U で正則。

P-4. $L(s, \mathbb{1}) = \zeta(s)$ (Riemann zeta 関数) は U上 $s=1$ のみで極をもち．そこで単純。

これより．次の Dirichlet 級数

$$F_\alpha(s) = -\sum_{\chi} \chi(-\alpha) \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$$

$$= \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{p}, k \\ [\mathfrak{p}^k] = \alpha}} (\log \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}^{-ks} \Big) \times \big(\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \big)$$

は $s=1$ でのみ単純な極を持ち，留数は1だから．Tauber型定理を適用して．上の定理は得られる。

幾何の場合も．$H_1(M, \mathbb{Z})$ の1次元指標 χ に対し．L-関数 $L(s, \chi)$ を

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \chi([\mathfrak{p}]) e^{-sh\,\ell(\mathfrak{p})}\right)^{-1}$$

(ここで．$\mathfrak{p}$ は素な閉測地線．$[\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{p}$ の homology 類．$\ell(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の長さを表わす。) で定義すれば．Selberg, Bowen, Ruelle Parry-Pollicott, Adachi-Sunada らにより．性質 P-1 ～ 4 は示されているので．$\#(H_1(M, \mathbb{Z})) < +\infty$ の時は．同様にできる。$\#(H_1(M, \mathbb{Z})) = +\infty$ の場合は．$F_\alpha(s)$ の定義中に表われる χ に関する和が無限和になるので．このままではうまくい

かない。

§3. Twisted Laplacian の固有値の変化。

E_χ を、指標 χ に付随する M 上の flat line bundle，Δ_χ をその上の Laplacian，Δ_χ の固有値を $\{0 \leqq \lambda_0(\chi) \leqq \lambda_1(\chi) \leqq \cdots\}$ とする。$\lambda_0(\chi) = 0$ と $\chi = \mathbb{1}$ は同値であり，$\lambda_0(\mathbb{1}) \lneqq \lambda_1(\mathbb{1})$ である。$\lambda_0(\chi)$ の χ に関する変化を調べるために，指標群 $\hat{H}$ と harmonic 1-form の空間 $A(M)$ (= Albanese torus) を次のように同一視する。

$$A(M) \ni \omega \longrightarrow \chi_\omega = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\int_{C(\gamma)} \omega\right) \in \hat{H}$$

(ここで $C(\gamma)$ は $[C(\gamma)] = \gamma$ となる閉曲線を表わす。) この時，

<u>命題(3.1)</u> (1) $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda_0(\chi_{t\omega}) = 0$

(2) $$\mathrm{Hess}\big|_0\, \lambda_0(\omega, \omega) = \frac{8\pi^2}{\mathrm{vol}(M)} \int_M \|\omega\|^2$$

(ここで $\|\ \|$ は余接空間のノルム)

(証明) M の普遍被覆 $\tilde{M}$ の1点，$\tilde{p}_0$ をとり，関数 $\tilde{s}_\omega$ を

$$\tilde{s}_\omega(\tilde{p}) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\omega}\right)$$

で定義する。（ここで $\tilde{\omega}$ は ω の lift）。すると $\tilde{S}_\omega(\gamma\tilde{p})=\chi_\omega(\gamma)\tilde{S}_\omega(\tilde{p})$，$\gamma\in\pi_1(M)$ が成り立つので，$\tilde{S}_\omega$ は E_{χ_ω} の section S_ω の lift とみなせる。E_{χ_ω} の section f_ω は $f_\omega=S_\omega f$ なる関係で M 上の関数 f と同一視できる。これにより固有方程式

$$\Delta_{\chi_\omega}=\lambda_k(\chi_\omega)f_{k,\omega}$$

は次の f_k に関する方程式と同値になる。

$$\Delta f_k+4\pi\sqrt{-1}(df_k,\omega)+4\pi^2\|\omega\|^2 f_k=\lambda_k(\chi_\omega)f_k$$

（，）は余接空間の内積である。両辺を M 上積分すると ω が harmonic であることより，

$$4\pi^2\int_M\|\omega\|^2=\lambda_k(\chi_\omega)\int_M f_k$$

が得られる。$k=0$，$\omega=t\omega$ を代入し，$f_0\equiv1$ に注意すれば，(2) が導かれる。(1) は容易。

§4. 定理3の証明（I）（[1] の方法）

ここで述べる証明は §2 の方法の延長上にある方法である。Compact Riemann 面の場合，§2 で定義した L-関数 $L(s,\chi)$ は Selberg zeta 関数 $Z(s,\chi)$ と $L(s,\chi)=Z(s+1,\chi)/Z(s,\chi)$ なる関係で結びついており，性質 P-1〜4 以上に次がいえる。

命題 (4.1) $\dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \sum \dfrac{1}{s - f_k(\chi)}$ は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ で正則。

（ここで．$f_k(\chi) = (1 + \sqrt{1 - 4\lambda_k(\chi)})/2$ ，和は $\lambda_k(\chi) < \frac{1}{4}$ なる k についてとるものとする。）

$H_1(M, \mathbb{Z}) \ni \alpha$ に対し．$F_\alpha(s)$を次のように定義する。

$$F_\alpha(s) = -\int_{A(M)} \chi(-\alpha) \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\, d\chi$$

（ここで $d\chi$ は normalized Haar 測度）

§2での $F_\alpha(s)$ の直接の類似としては $(-d/ds)^g$の部分がないものが考えられるが．これは．$F_\alpha(s)$の singularity の形を $1/(s-1)$ の typeにするためにつけたものである。指標の直交関係より．

$$F_\alpha(s) = \sum_{\substack{k=1 \\ k[\gamma]=\alpha}}^{\infty} \sum_{\gamma} k^g\, l(\gamma)^{g+1} e^{-sk\,l(\gamma)}$$

とかける。次の補題は我々の証明では本質的である。

$c = (g-1)^g / \mathrm{vol}\,(A(M))$ ，（但し．$\mathrm{vol}\,(A(M))$ は harmonic 1-forms の L^2内積から導かれる体積）とおく。

補題(4.2) (1) $F_\alpha(s)$は $\mathrm{Re}\, s \geq 1$ 上 $s = 1$ 以外で連続。

(2). 局所可積分関数 $h(t)$ が存在して，$\varepsilon > 0$，$s = 1+\varepsilon+\sqrt{-1}t$ とおくとき．次が成り立つ。

$$\left| F_\alpha(s) - \frac{c}{s-1} \right| \leq h(t).$$

（証明の方針）　(1) は性質 P−3, 4 より得られる。

(2) を示す。　簡単のため．変数変換等にともなう定数はすべて．$c > 0$ であらわす。（上の c とはもちろん異なる。）

命題 (3.1) より，Morse の補題を用いると．$A(M) \ni \mathbb{1}$ の近傍 V' 上の局所座標．$\{x_i(\omega)\}_{i=1}^{2g}$ で

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_0(x_\omega) &= f(x) = 1 - |x|^2 \\ x(\mathbb{1}) &= 0 \end{aligned}$$

とかけるものが存在する。　この時．座標変換にともなう Jacobian は $c + O(|x|)$，$\chi_\omega(-\alpha)$ は $1 + O(|x|)$ である。$V' \supset V = \{|x| \leq a\}$ とする。

$$F_\alpha(s) = -c\left(\int_V + \int_{A(M)-V} \right)$$

右辺第2項は．$L'(s.\chi) / L(s.\chi)$ が．$A(M)-V$ に属する χ については、$U \supset \{\mathrm{Re}\, s \geq 1\}$ 上正則なことより．$\int_{A(M)-V}$ も U 上正則。　以下において．$h_i(s)$ は U 上正則な関数である。

命題(4.1)より.

$$-\int_V \chi(-\alpha)\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\,d\chi$$

$$= -\int_V \chi(-\alpha)\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s-s_0(\chi)}\,d\chi \quad + \quad h_1(s)$$

(1)より

$$= -\int_V (1+O(|\chi|))\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s-1+|\chi|^2}\,d\chi \;+\; h_1(s)$$

極座標 $(r,\theta_1,\ldots\theta_{2g-1}) = (r,\Omega)$ に変換して

$$= -c\int_{S^{2g-1}} d\Omega \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \left(1+O(|\chi|)\right) \frac{-r^{2g-1}}{s-1+r^2}$$

$$\times\left(1+O(|\chi|)\right)dr \;+\; h_1(s)$$

(2) $$= -c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-r^{2g-1}}{s-1+r^2}\,dr + \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \int_0^a \frac{\phi(r,\Omega)}{s-1+r^2}\,dr$$

$$+\, h_1(s)$$

(ここで ϕ は. $|\phi(r,\Omega)| \le c\, r^{2g}$ をみたす関数。)

(2)の第1項 $$= -c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \left((1-s)^{g-1}\frac{r}{s-1+r^2}\right)dr$$

$$-c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \sum_{i=0}^{g-2} (1-s)^i\, r^{2g-2i-3}\,dr$$

$$= -c\left(-\frac{d}{ds}\right)^{g}(1-s)^{g-1}\left(\log(s-1)-\log(s-1+a)\right)$$

$$+ h_3(s)$$

$$= -\frac{c}{s-1} + h_4(s)$$

となるから，(2)の才2項が $\mathrm{Re}\, s=1$ 上で，t の関数として局所可積分であることを示せばよい。このことは，$\mu>0$ に対し，$\displaystyle\int_{-\mu}^{\mu}\int_0^a \frac{r^{2g}}{(t^2+r^4)^{(g-1)/2}}\,dr\,dt < +\infty$ より得られる。

上の補題に Tauber 型定理を適用する。

Tauber型定理　$\varphi(x)$を $\varphi(0)=0$をみたす，非負，単調非減少関数とし，$f(s)$を

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d\varphi(x)$$

で定義する。$f(s)$が次の性質をもつとする。

(1)　$f(s)$は $\mathrm{Re}\, s>1$ 上有限の値を持つ。

(2)　定数 $c>0$ が存在して，$\varepsilon>0$，$s=1+\varepsilon+\sqrt{-1}\,t$ に対し

$$j_\varepsilon(t) = f(s) - \frac{c}{s-1}$$

とおく時、$j(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} j_\varepsilon(t)$ がほとんど至る所存在し、また、局所可積分関数 $h(t)$ が存在して $|j_\varepsilon(t)| \le h(t)$ をみたす。

この時、
$$\varphi(x) \sim c e^x$$
が成り立つ。

今、$\varphi(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ell(\mathfrak{z})\le x \\ k[\mathfrak{z}]=\alpha}}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} k^g \ell(\mathfrak{z})^{g+1}$ とおくと、$F_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\varphi(x)$ になるから $\varphi(x) \sim c e^x$ が得られる。

これより、定理3を導くことは、数論の場合同様、初等的に示せる。

以上の議論において、きちんと計算していくと、定理3の定数 $(g-1)^g$ は $(g-1)^g/\mathrm{Vol}(A(M))$ になる。一方、$\mathrm{Vol}(A(M))=1$ であることはよくしられている。

§5 定理3の証明(II)([3]の方法)

Selberg の跡公式を思い出す。

$$\sum_j \hat{h}(r_j(\chi)) = 2(g-1)\int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r)\, \hat{h}(r)\, dr$$

$$+\sum_{\gamma:\mathrm{prime}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi([\gamma])\,\ell(\gamma)}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)}\,h(k\ell(\gamma))$$

（ここで $\hat{h}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{irs}h(s)\,ds$, $\lambda_k(\chi)=\frac{1}{4}+r_k^2(\chi)$
である。）

さて、$h(r)$を次のようなものにする。まず $k(s)$を、compact support, $\int_{-\infty}^{\infty}k(s)\,ds=1$, $k(s)\geq 0$ の偶関数とし、$k_\varepsilon(s)=\frac{1}{\varepsilon}h(\frac{s}{\varepsilon})$, $h(s)=\chi_{[-T,T]}*k_\varepsilon(s)$ （$*$はconvolution）とおくと、$\hat{h}(r)=(2\sin Tr/r)\,\hat{k}_\varepsilon(r)$, $\hat{k}_\varepsilon(r)$は急減少関数となる。

両辺に $\chi(-\alpha)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle)$ をかけて $A(M)$上積分する。

$$\sum_j\int_{A(M)}\hat{h}(r_j(\chi))\,e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}\,d\chi$$

(1)

$$=2(g-1)\,\delta_{\alpha,0}\int_{-\infty}^{\infty}r\tanh(\pi r)\,\hat{h}(r)\,dr$$

$$+\sum_{\substack{\gamma:\mathrm{prime}\\ k[\gamma]=\beta\\ \ell(\gamma)\leq T}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ell(\gamma)\,h(k\ell(\gamma))}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)}$$

命題(5.1)　(L) = (1)の右辺

$$(2) \qquad = \int_V \hat{h}(r_0(x))\, e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}\, dx + O(T/\varepsilon^2 + e^{\nu T}) \qquad (\nu < \tfrac{1}{2})$$

（証明の方針）　$r_0(x)$ に対する積分 $\int_{A(M)-V}$ は $e^{\nu T}$ で評価できる。 $j \neq 0$ なる $r_j(x)$ は有限個は虚数、それ以外は実数である。 虚数の部分は、$\tilde{M}$ での M の基本領域における Neumann 問題の固有値 $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqq \mu_2 \cdots$ に対し、$\mu_j \leq \lambda_j(x)$ がなりたつことより $e^{\nu T}$ で評価できる。 実数の部分は、$\hat{k}_\varepsilon(r)$ が急減少であることを用いると T^2/ε で評価できることがわかる。

さらに (2) の右辺の積分で $\hat{h}(r_0) = 2\sinh(-iTr_0)/(-ir_0) \times \hat{k}_\varepsilon(r_0)$, $k_\varepsilon(r_0)$ $1 + O(\varepsilon)$, $\sinh(-ir_0T)$ を $e^{-ir_0T/2}$ でおきかえると、

$$(3) \qquad (L) = 2e^{T/2} \int_V e^{(-ir_0(x) - \frac{1}{2})T} \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}}{-ir_0(x)}\, dx + O(\varepsilon e^{T/2} + T/\varepsilon^2 + e^{\nu T})$$

次に (2) の右辺 = (R) を計算する。

命題(5.2)

(4)
$$(R) = \sum_{\substack{\gamma:\mathrm{prime} \\ k[\gamma]=\alpha \\ l(\gamma)\le T}} \frac{l(\gamma)}{\sinh(l(\gamma)/2)} + O(T^2 + \varepsilon e^T)$$

(証明の方針) まず、Margulisらの幾何学的素数定理より

$$\sum_{\substack{\gamma:\mathrm{prime} \\ T< l(\gamma) < T+\varepsilon}} 1 = O(\varepsilon e^T)$$

である。 $k>1$ での和の部分は $O(T^2)$, k_ε での smoothing は $\varepsilon e^{T/2}$ で評価できる。

(3), (4) より.

(5)
$$P(s) := \sum_{\substack{\gamma:\mathrm{prime} \\ k[\gamma]=\alpha \\ l(\gamma)\le T}} \frac{l(\gamma)}{\sinh(l(\gamma)/2)}$$

$$= e^{T/2} \int_V e^{(-\sqrt{-1}\, r_0(x) - \frac{1}{2})T} \cdot \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}}{-i\, r_0(x)}\, dx$$

$$+ O(e^{\nu_2 T}) \qquad (\nu_2 < \tfrac{1}{2})$$

(5)の右辺は、次の補題により計算できる。

<u>補題(5.3)</u>　$\rho(x)$ を $x=0$ の近傍 V 上の C^∞ 関数で、$\rho(0)=0$、$\rho(x)>0$ $(x\neq 0)$、$\partial^2\rho/\partial x_i\partial x_j=-b_{ij}$、$(b_{ij})$ は positive definite とし、$f(x)$ が V 上 C^∞ ならば、

$$\int_V e^{T\rho_0(x)} f(x)\,dx \sim \frac{\pi^g}{T^g\sqrt{\det B}}\left(f(0)+\frac{C_1}{T}+\frac{C_2}{T^2}\cdots\right)$$

(証明の方針)　Morse の補題を $\rho_0(x)$ に適用し、そのときの座標に関し、$f(x)$ を Taylor 展開する。

以上から、定理2及び3は、$g(T)$

$$=\sum_{\substack{\gamma:\text{prime}\\ [\gamma]=\alpha\\ l(\gamma)\le T}} 1 = \int_0^T \frac{\sinh(s/2)}{s}\,dp(s)$$

を用いて、導かれる。

§6　定理1の証明について

今の所、一般の負曲率多様体に対しては、Selberg型の跡公式が成立するかどうかは不明であるので、§5の方法は適用できない。(§5 の方法の方が、第1 Betti数が奇数の時も同時に扱うことができ、簡明。) そこで §4 の方法を用

いるのであるが．命題(4.1)や．$L(s,\chi)$のsingularityが．Laplacianの固有値であらわされるかはやはり不明。そこでMの測地流(UM, φ_t)を．Bowenに従って．Symbolic dynamics（有向有限グラフによる近似）を用いる。その時．Laplacianのかわりになるもの（Ruelle operator L）が存在する。Lの最大固有値$\mu(\chi)$が．$\lambda_0(\chi)$のかわりの役目をはたす．一般にLは自己共役かどうかは不明であるが．測地流φ_tの$\varphi_{-t}(-v) = -\varphi_t(v)$なる関係を用いると$\mu$が．実数で正であることはわかる。命題(3.1)同様，Hessian μが．definiteであることもわかる。以下は第1 Betti数が．偶数の場合は．§4の方法がそのまま使えるのであるが．奇数の場合は．修正（例えば．Tauber型定理）を要する。詳しくは[2]を参照して下さい。

References.

[1] A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface, preprint.

[2] ——————————, in preparation.

[3] R. Phillips and P. Sarnak, Geodesics in homology classes

[4], T. Sunada. 数学, 38巻4号. 289-301（他の文献はこれの文献表をみて下さい。）